28.05.2020

2019-2020 ÖĞRETİM YILI ANALİZ IV DERSİ FİNAL SINAVI

1- $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x\sin(1/y)$ fonksiyonu için $\lim_{(x,y)\to(0,0),x>0,y>0} f(x,y)$,

$\lim_{x\to 0^+}\lim_{y\to 0^+} f(x,y)$ ve $\lim_{y\to 0^+}\lim_{x\to 0^+} f(x,y)$ limitlerini hesaplayınız.

2- $f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$ fonksiyonunun $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

3- $A=\left\{\left(n\sin(2/n),\ln n/n,\left(1-(2/n)\right)^n\right): n=1,2,3,...\right\}\subset\mathbb{R}^3$ altkümesini içeren en küçük kompakt kümeyi belirleyiniz.

4- $f(x,y)=x^{2/3}y^{1/3}$ fonksiyonunun $x+4y=96$ ve $x\geq 0, y\geq 0$ yan koşulları altındaki maksimumdeğerini bulunuz.

5- $f(x,y)=\cos\left(y^3\right)$ fonksiyonunun $y=2\sqrt{x}, y=8$ ve $x=0$ eğrileri ile sınırlanan bölgedeki integralini hesaplayınız.

6- $\mathbb{R}^2$ içindeki $A=\left\{(x,y): x-1\leq y\leq x+1\right\}$ ve $B=\left\{(x,y): 1<x^2+y^2<4\right\}$ altkümelerinin konveks olup olmadığını değerlendiriniz.

7- a. $f(x,y)=x^3-xy$ fonksiyonu ve $P=(0,1)$, $Q=(1,3)$ noktaları verilsin. Ortalama değer teoremini uygulayarak c noktasını bulunuz.

b. $f(x,y)=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ fonksiyonunun $(1,2)$ noktasında 3. dereceden Taylor polinomunu içeren Taylor formülünü yazınız.

8- $f(x,y)=\left(e^x\left(y^2-3x+1\right), x\ln\left(y^2+1\right)+y\right)$ fonksiyonunun $(x,y)=(0,0)$ noktası civarında C^1- terslenebilir olup olmadığını araştırınız. Varsa, $D\left(f^{-1}\right)(1,0)$ türevini bulunuz.

Not: **Sınav, 09.00-12.00 saatleri arasındadır.**

BAŞARILAR….

Prof. Dr. Cenap DUYAR - Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

CEVAPLAR

1- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),x>0,y>0} f(x,y)=0$ olur, çünkü $\forall\varepsilon>0$ verildiğinde $\delta:=\varepsilon$ seçilirse

$\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta\Rightarrow |x\sin(1/y)-0|\le|x|<\varepsilon$ olur.

$\lim\limits_{x\to0^+}\lim\limits_{y\to0^+} x\sin(1/y)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\lim\limits_{y\to0^+} x\sin(1/y)\right)$ gösteriminde sağda parantez içindeki limit yoktur, çünkü y yerine 0 noktasına yakınsayan $a_n=1/((\pi/2)+2n\pi)$ ve $b_n=1/n\pi$ dizileri alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty} x\sin(1/a_n)=x$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x\sin(1/b_n)=0$ olmak üzere iki farklı limit değerine ulaşılır. Buna göre $\lim\limits_{x\to0^+}\lim\limits_{y\to0^+} f(x,y)$ ardışık limiti yoktur.

$\lim\limits_{y\to0^+}\lim\limits_{x\to0^+} x\sin(1/y)=\lim\limits_{y\to0^+}\left(\lim\limits_{x\to0^+} x\sin(1/y)\right)=\lim\limits_{y\to0^+}(0)=0$.

2- Zincir kuralı kullanılırsa,

$$f_x=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2x=-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2},$$
$$f_{xx}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}-x(-3/2)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}2\mathrm{x};$$
$$f_y=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2y=-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2},$$
$$f_{yy}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}+3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2};$$
$$f_z=-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2},\ f_{zz}=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}+3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}$$
$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=-3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)=0$$

elde edilir.

3- $A=\left\{\left(n\sin(2/n),\ln n/n,(1-(2/n))^n\right): n=1,2,3,\dots\right\}\subset\mathbb{R}^3$ altkümesi kompakt değildir. Çünkü

$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2/n)=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(2/n)}{(2/n)}=2.1=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1/x)}{1}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0,$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1-(2/n))^n=e^{-2}$

olduğundan $P=\left(2,0,e^{-2}\right)$ noktası A kümesinin bir yığılma(limit) noktasıdır. Bu durumda A sınırlı olmasına karşın P yi içermediğinden kapalı değildir. O zaman

$$B=\left\{\left(n\sin(2/n),\ln n/n,\left(1-(2/n)\right)^{n}\right):n=1,2,3,...\right\}\cup\left\{\left(2,0,e^{-2}\right)\right\}\subset\mathbb{R}^{3}$$

kümesi hem kapalı hemde sınırlı olacaktır. Aşikar olarak B kümesi A kümesini içeren en küçük kompakt(kapalı ve sınırlı) kümedir.

4- $g(x,y)=x+4y-96$ olmak üzere $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ Lagrange fonksiyonunu ele alalım. $\nabla L=\left(f_x+\lambda g_x,f_y+\lambda g_y,g\right)=0$ denkleminden $f_x=-\lambda g_x,f_y=-\lambda g_y,g=0$ ve böylece

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}=-\lambda,\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}=-4\lambda,x+4y=96;$$
$$\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}=\frac{1}{12}x^{2/3}y^{-2/3},8x^{-1/3}y^{1/3}=x^{2/3}y^{-2/3},\mathrm{x}=8\mathrm{y}$$

bulunur ve $x+4y=96$ denkleminden $8y+4y=96,12y=96,y=8$ve $x=8y$ den $x=8.8=64$ elde edilir. O halde aranan değer $f(64,8)=(64)^{2/3}(8)^{1/3}=32$ olmalıdır.

5- $y=8\Rightarrow 8=2\sqrt{x},x=16\ ve\ x=0\Rightarrow y=0$ olması dikkate alınıp, 1.dörtlükte söylenen bölge çizilebilir. $\int_0^{16}\int_{2\sqrt{x}}^{8}\cos\left(y^3\right)dydx$ veya $\int_0^{8}\int_0^{y^2/4}\cos\left(y^3\right)dxdy$ integrallerinden biri hesaplanmalıdır. İkinci integralin hesabı kolaydır.

$$\int_0^8\int_0^{y^2/4}\cos\left(y^3\right)dxdy=\int_0^8\left(\int_0^{y^2/4}\cos\left(y^3\right)dx\right)dy=\int_0^8\left(x\cos\left(y^3\right)\Big|_{x=0}^{x=y^2/4}\right)dy=\int_0^8\frac{1}{4}y^2\cos\left(y^3\right)dy$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^8 y^2\cos\left(y^3\right)dy=\frac{1}{4}\int_0^8\frac{1}{3}\cos\left(y^3\right)d\left(y^3\right)=\frac{1}{12}\sin\left(y^3\right)\Big|_{y=0}^{y=8}=\frac{\sin\left(8^3\right)}{12}$$

İstenen sonuçtur.

6- $A=\left\{(x,y):x-1\le y\le x+1\right\}$ ve $B=\left\{(x,y):1<x^2+y^2<4\right\}$.

A konvekstir, çünkü $\forall(x,y),(u,v)\in A$ için $t\in[0,1]$ olmak üzere

$$(1-t)(x,y)+t(u,v)=\left((1-t)x+tu,(1-t)y+tv\right)$$

olup, $x-1\le y\le x+1,u-1\le v\le u+1$ olmasından

$$\begin{aligned}(1-t)x+tu-1&=(1-t)(x-1)+(1-t)+t(u-1)+t-1\\&\leq(1-t)y+tv\leq(1-t)(x+1)+t(u+1)\\&=(1-t)x+(1-t)+tu+t=(1-t)x+tu+1\end{aligned}$$

olur. B kümesi konveks değildir, çünkü $(-3/2,0)\in B$ ve $(3/2,0)\in B$ olup, $t=1/2$ için

$(1-(1/2))(3/2,0)+(1/2)(-3/2,0)=(0,0)$ olup, $(0,0)\notin B$ olmaktadır.

7- a) $t_0\in(0,1)$ olmak üzere aranan c noktası

$$c=(1-t_0)P+t_0Q=(1-t_0)(0,1)+t_0(1,3)=(t_0,1+2t_0)$$

olur. Ortalama değer teoreminden

$$f(1,3)-f(0,1)=Df(c)\cdot((1,3)-(0,1)) \qquad (1)$$

yazılır. Şimdi $Df(c)$'yi bulalım.

$$Df(x,y)=(D_1f(x,y),D_2f(x,y))=(3x^2-y,-x)$$

olup

$$Df(c)=Df(t_0,1+2t_0)=(3t_0^2-1-2t_0,-t_0)$$

bulunur. Böylece (1) eşitliğinden

$$-2-0=(3t_0^2-1-2t_0,-t_0)\cdot((1,3)-(0,1))\Rightarrow -2=3t_0^2-2t_0-1-2t_0$$

olup

$$3t_0^2-4t_0+1=0$$

denklemi elde edilir. Buradan $t_0=1$ ve $t_0=\dfrac{1}{3}$ bulunur. $t_0=\dfrac{1}{3}\in(0,1)$ olduğundan aranan c noktası

$$c=\left(\frac{1}{3},1+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

bulunur.

b) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ fonksiyonunun $(1,2)$ noktasında 3. dereceden Taylor polinomunu içeren Taylor formülü

$$\begin{aligned} f(x,y) =\ & f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2) \\ & +\frac{1}{2}\left[f_{xx}(1,2)(x-1)^2+2f_{xy}(1,2)(x-1)(y-2)+f_{yy}(1,2)(y-2)^2\right] \\ & +\frac{1}{6}\left[f_{xxx}(1,2)(x-1)^3+3f_{xxy}(1,2)(x-1)^2(y-2)+3f_{xyy}(1,2)(x-1)(y-2)^2+f_{yyy}(1,2)(y-2)^3\right] \\ & +R_4 \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} & f(1,2)=e^{-5} \\ & f_x(x,y)=-2xe^{-x^2-y^2} \Rightarrow f_x(1,2)=-2e^{-5} \\ & f_y(x,y)=-2ye^{-x^2-y^2} \Rightarrow f_y(1,2)=-4e^{-5} \\ & f_{xx}(x,y)=\left(-2+4x^2\right)e^{-x^2-y^2} \Rightarrow f_{xx}(1,2)=2e^{-5} \\ & f_{xy}(x,y)=4xye^{-x^2-y^2} \Rightarrow f_{xy}(1,2)=8e^{-5} \\ & f_{yy}(x,y)=\left(-2+4y^2\right)e^{-x^2-y^2} \Rightarrow f_{yy}(1,2)=14e^{-5} \\ & f_{xxx}(x,y)=\left(12x-8x^3\right)e^{-x^2-y^2} \Rightarrow f_{xxx}(1,2)=4e^{-5} \\ & f_{xxy}(x,y)=\left(-8x^2y+4y\right)e^{-x^2-y^2} \Rightarrow f_{xxy}(1,2)=-8e^{-5} \\ & f_{xyy}(x,y)=\left(-8xy^2+4x\right)e^{-x^2-y^2} \Rightarrow f_{xyy}(1,2)=-28e^{-5} \\ & f_{yyy}(x,y)=\left(12y-8y^3\right)e^{-x^2-y^2} \Rightarrow f_{yyy}(1,2)=-40e^{-5} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} f(x,y)=e^{-5}\Big[& 1+(-2)(x-1)+(-4)(y-2)+(x-1)^2+8(x-1)(y-2)+7(y-2)^2 \\ & +\frac{2}{3}(x-1)^3+(-4)(x-1)^2(y-2)+(-14)(x-1)(y-2)^2+\left(-\frac{20}{3}\right)(y-2)^3\Big]+R_4 \end{aligned}$$

bulunur.

8-

$f(x,y)=\left(e^x\left(y^2-3x+1\right),x\ln\left(y^2+1\right)+y\right)$ fonksiyonunun $J_f(x,y)$ türev matrisi

$$Df(x,y) = J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x\left(y^2-3x+1\right)-3e^x & 2ye^x \\ \ln\left(y^2+1\right) & \dfrac{2xy}{y^2+1}+1 \end{pmatrix}$$

olup, türev determinantı

$$\Delta_f(x,y) = \begin{vmatrix} e^x\left(y^2-3x+1\right)-3e^x & 2ye^x \\ \ln\left(y^2+1\right) & \dfrac{2xy}{y^2+1}+1 \end{vmatrix}$$

olarak bulunur. Yine

$$\Delta_f(0,0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

olduğundan f fonksiyonu $(x,y)=(0,0)$ noktası civarında C^1- terslenebilirdir.

Şimdi $D\left(f^{-1}\right)(1,0)$ türevini bulalım. $f(0,0)=(1,0)$ olduğundan $f^{-1}(1,0)=(0,0)$ olur. Böylece

$$D\left(f^{-1}\right)(1,0) = \left(Df(0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.